



## Apprendre le nombre Cycle 1 et Cycle 2

Michel Fayol

Université de Clermont Blaise Pascal & CNRS

[Michel.fayol@univ-bpclermont.fr](mailto:Michel.fayol@univ-bpclermont.fr)



Colmar oct 2016



## Pourquoi en sommes-nous là?

- Importance des mathématiques pour la réussite académique et professionnelle ;
- Comparaisons internationales : très importantes différences et **inégalités** ;
- **Précocité** des inégalités : importance du milieu socio-culturel et de la préscolarisation (R3);
- Recherches : **espérer des améliorations** si interventions **précoces** ; sur quoi? comment prédire les performances ultérieures?
- Performances en mathématiques : **hétérogénéité des composantes** (R4); <sup>2</sup>

## Un bilan des difficultés

- Les enfants et les élèves éprouvent parfois des **difficultés** en mathématiques, même très précocement (R1) ; renforcé par l'image ;
- **Plusieurs domaines** sont concernés :
  - Propres aux **mathématiques** : sens du nombre, dénombrement, opérations, etc. ;
  - **Capacités générales** : langage, attention, mémoire de travail, vitesse, émotions, **anxiété** (R4) ;
  - **Instruction** dispensée, très tôt, familles ou école (R3) ;

Colmar oct 2016

3

## Objectifs

- **Permettre la réussite pour tous** ; individualiser ; gérer les apprentissages et les interventions :
  - **Prévenir** les échecs (mais non les obstacles) et l'anxiété : curricula ; démarches adaptées ; outils divers avec indications précisées ;
  - **Traiter en temps réel** les difficultés : aider à les surmonter ; connaissance des modalités d'apprentissage ; **formation des enseignants** R6 ;
  - **Remédier** si les difficultés ne sont pas surmontées par les interventions pédagogiques en première intention ;

Colmar oct 2016

4

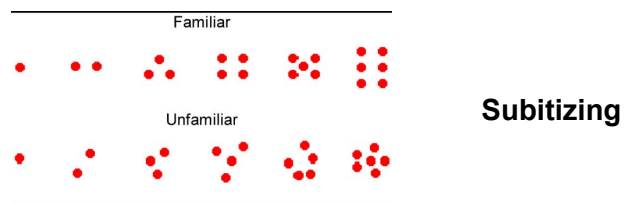
## Comment faire face?

- Enseigner formellement et **explicitement** ; souvent efficace ; effets attestés de l'enseignement structuré et explicite, avec feed-back ; programmer ; évaluer ;
- Induire les savoirs et savoir-faire par le biais **d'activités ludiques** (plus ou moins), conçues de manière à **contraindre les acquisitions** ; apprentissage implicite ;
- École maternelle et école élémentaire ;

Colmar oct 2016

5

## Discriminer les petites quantités



Sans doute associée aux capacités de mémoire à court terme visuelle ;

Ne signifie pas qu'ils comprennent la quantité de référence ; ni qu'ils l'associent aux symboles verbaux ou indo-arabes ;

Peut s'étendre à des quantités plus grandes si configurations particulières (domino, dés) ;

Peut être sélectivement affectée

Colmar oct 2016

7

## Que savent-il à l'entrée en maternelle?

Trois types de savoirs

Les petites quantités; les grandes quantités; des noms de nombres

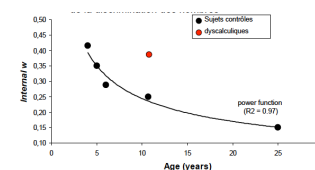
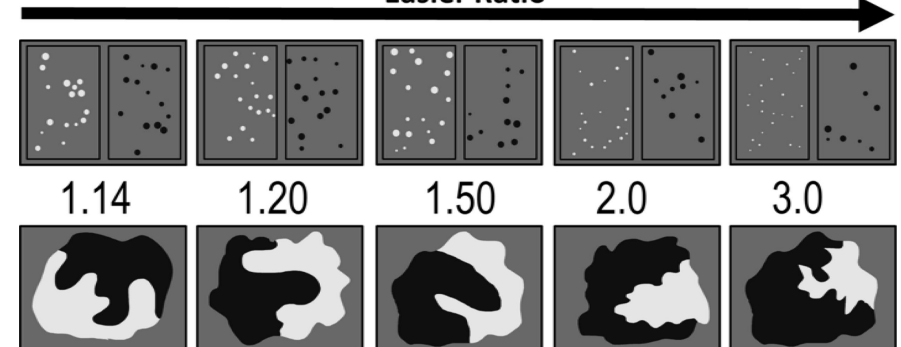
Colmar oct 2016

6

## Comparaisons de grandeurs et quantités

Ordre Dev. Psy. 2013 N23

Easier Ratio



Colmar oct 2016

8

## Deux capacités de base

- Traitement précis des petites quantités: non numérique? MT? Rarement affecté ;
- Traitement **approximatif** des grandes quantités:
  - Imprécision diminue avec **l'âge** ;
  - Imprécision diminue avec **l'éducation** ;
  - **Prédit** partiellement les performances **ultérieures** en arithmétique élémentaire ; importance des interventions ;
  - Est **améliorable** par exercice ;

Colmar oct 2016

9

## Représentation verbale

Comparaison anglais, chinois, français

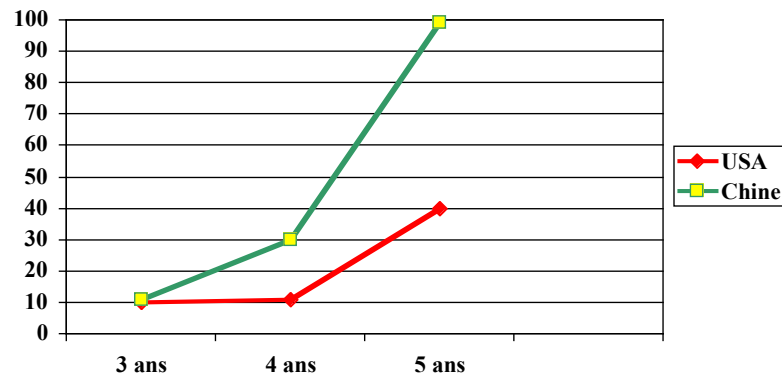
|    | Français    | Anglais      | Chinois    |
|----|-------------|--------------|------------|
| 1  | un, une     | one          | yi         |
| 2  | deux        | two          | er         |
| 3  | trois       | three        | san        |
| 10 | dix         | ten          | shi        |
| 11 | onze        | eleven       | shi yi     |
| 12 | douze       | twelve       | shi er     |
| 13 | treize      | thirteen     | shi san    |
| 20 | vingt       | twenty       | er shi     |
| 21 | vingt et un | twenty-one   | er shi yi  |
| 22 | vingt-deux  | twenty-two   | er shi er  |
| 23 | vingt-trois | twenty-three | er shi san |

Colmar oct 2016

10

## Impact des caractéristiques verbales sur l'acquisition de la numération verbale

Comparaison anglais chinois



Colmar oct 2016

11

## Évolution de la chaîne verbale

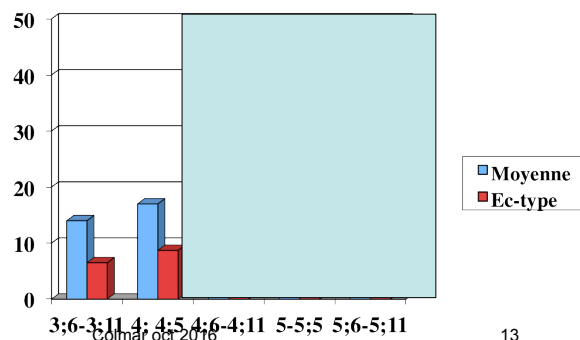
|   | Stable et conventionnelle | Stable mais non conventionnelle | Ni stable ni conventionnelle |
|---|---------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| 1 | Un deux trois             | Quatre six huit neuf            | Quatorze treize cinq         |
| 2 | Un deux trois             | Quatre six huit neuf            | Douze quinze treize          |
| 3 | Un deux trois             | Quatre six huit neuf            | Quatorze                     |
| 4 | Un deux trois             | Quatre six huit neuf            | Neuf                         |

Colmar oct 2016

12

## Évolution de la partie conventionnelle

- Dernier item atteint au comptage sans dénombrement



13

## Évolution de la partie conventionnelle

|       | Classe moyenne | Classe défavorisée |
|-------|----------------|--------------------|
| 4 ans | 19,9           | 15,5               |

Les différences **verbales** associées aux classes sociales sont facilement éliminées par l'école

Colmar oct 2016

14

## En résumé

- Dès l'entrée à l'EM, des différences importantes entre enfants concernant :
  - La discrimination des petits ensembles ;
  - La discrimination des « grandes » quantités ;
  - La connaissance des noms de nombres et des chiffres arabes ;
  - L'attitude et les émotions en relation avec les nombres ;

Colmar oct 2016

15

## Ce qu'ils ne savent pas

- À quoi servent les nombres et noms de nombres ; relation entre subitizing et comptage ;
- Dénombrer de manière précise ;
- Relier les noms de nombres (ou les chiffres arabes) aux quantités ;
- Comment fonctionne le système numérique ; compositions et décompositions ;
- Évoquer les quantités à partir du verbal ou des noms de nombres ;

Colmar oct 2016

16

## Cycles 1 et 2

- Favoriser le passage **d'un traitement intuitif et approximatif** des **grandeurs et quantités**, disponible dès la naissance mais qui s'affine au fil du temps, **à un traitement précis** et conforme aux contraintes culturelles de ces mêmes grandeurs et quantités dont on attend qu'il soit **en place à l'entrée à l'école élémentaire** ou en fin de CP ;
- **Facteurs** susceptibles d'influer sur ce passage ;

Colmar oct 2016

17

## Des propriétés

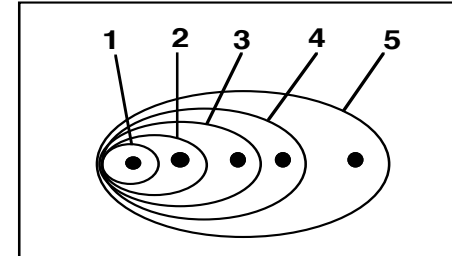
- La quantification est précise ;
- Cardinal peut s'obtenir par **correspondance terme à terme**, sans dénombrer ; indépendance par rapport aux caractéristiques perceptives ; compositions et décompositions ;
- Cardinal peut s'obtenir par **dénombrement** : correspondance entre noms de nombres (symboles) et entités ; itération de l'unité (4 c'est 3 et encore 1) ; égalité des distances entre successeurs (entre 7 et 8 et 2 et 3) ;

Colmar oct 2016

19

## Logique numérique: but du Cycle 1

Le nombre comme ensemble de classes emboîtées et ordonnées



Emboîtement (2 inclus dans 3, etc.), abstraction du cardinal, itération de l'unité (4 c'est 3 et encore 1), égalité des distances entre successeurs (entre 7 et 8 = entre 2 et 3), relation d'ordre

Colmar oct 2016

18

## Quelles sont les difficultés?

Comment s'établit la notion de cardinal? Comment les systèmes symboliques vont-ils rendre précis le dénombrement?

Colmar oct 2016

20

# De la représentation analogique à la représentation verbale

## •Deux problèmes :

–**Catégorisation** : la cardinalité devrait être indépendante par rapport aux caractéristiques perceptives des collections (3 étoiles, 3 fourmis, 3 voitures) ;

–**Le langage code la quantité par l'ordre** : 6 est plus grand que 5 puisque 6 vient après 5 ; les enfants doivent apprendre à évoquer la quantité à partir de la succession des mots de nombres ;

Colmar oct 2016

21

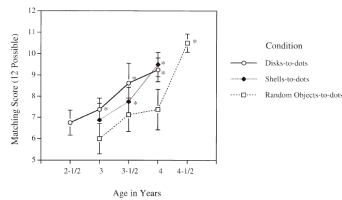
## Cardinal et correspondance terme à terme

Acquisition lente associée à des expériences nombreuses et diverses

Colmar oct 2016

22

## La notion de cardinal: abstraite



### La reconnaissance de l'équivalence

**numérique** (= le **cardinal**) de petites quantités (2, 3 et 4) est d'autant plus facile chez les plus jeunes (jusque vers 4 ans) que:

- Les entités se ressemblent ;
- La disposition spatiale est proche ;
- Les enfants connaissent la suite conventionnelle des noms de nombres ;

Colmar oct 2016

23

## La correspondance Terme à Terme (CTT)

|                        | Inférer le nombre | Inférer la correspondance |
|------------------------|-------------------|---------------------------|
| <b>Pour n = 3 ou 4</b> |                   |                           |
| 3 ans                  | .74               | .71                       |
| 4 ans                  | .93               | .88                       |
| Total                  | .82               | .84                       |
| <b>Pour n = 6 ou 7</b> |                   |                           |
| 3 ans                  | .66               | .59                       |
| 4 ans                  | .79               | .88                       |
| Total                  | .72               | .72                       |

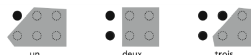
Dès 3 ans peuvent inférer la numérosité de 2 collections mises en CTT, et raisonner sur l'appariement de deux collections dénombrées. Toutefois, vrai avec petits nombres. Au delà de 4, labilité et inconsistances.

Colmar oct 2016

24

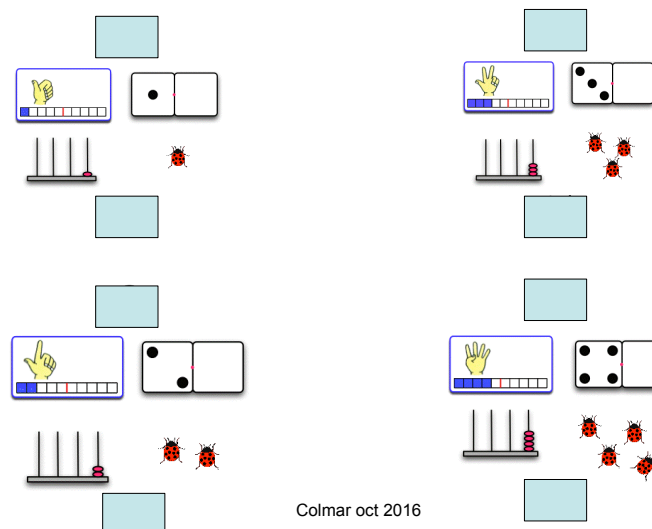
## Que faire?

- **Nombreuses activités** de mise en correspondance avec des entités différentes en tailles, couleurs, fonctions, etc. ;
- Variations des **dispositions**, des regroupements ;
- **Collections témoins** de doigts (contribution à l'abstraction du cardinal) ; (3 fourmis -> 3 doigts ; 3 doigts -> 3 fourmis) ;



25

## Différents codes analogiques



Colmar oct 2016

26

## La relation aux codes symboliques

Encore plus lent et complexe

## L'importance des codes

- Essayez de résoudre:
- XXXIV x XXIII
- CXXIX - XXXVIII
- Ce ne sont pas les quantités qui posent problème, mais **leur codage** et la **manipulation** des codes;
- Source principale de difficulté: le **code**; sa **signification**; sa **vitesse** d'accès (dans les 2 sens); sa **manipulation**;



## La relativité de la dimension verbale

- En **Amazonie**: peuplades sans séquence étendue de noms de nombres : limitée à « un, deux, trois... » ;
- Flou des appariements entre noms de nombres et quantités associées: 1 systématiquement appliqué ; 2 le plus souvent aussi ; mais 3 renvoie parfois à deux, parfois à 3 ou à 5 ;
- Pourtant, capacité d'évaluation approximative (donc représentation analogique fonctionnelle) et correspondance terme à terme exacte ;
- **C'est la relation code quantité qui pose problème ;**

Colmar oct 2016

29

## Comptage chez les 2-3 ans

- Imiter l'**alimentation d'animaux** (oiseaux, requins) auxquels l'E donne des entités diverses en quantité variant de 1 à 6 ; sans jamais évoquer de nombre ni de quantité ;
- 44 enfants de 2 à 3 ans, aucun ne compte au-delà de un; deux sous-groupes: ceux qui se focalisent (F) sur la quantité et les autres (A) ;
- Les enfants vont-ils utiliser le STO (exact jusqu'à 3) ou le SEA (diminution des réussites en fonction de la quantité) ;

Colmar oct 2016

30

## Un constat

| TYPES DE TACHES                                        | 2 1/2 | 3     | 3 1/2 | 4 | 4 1/2   | 5      | 5 1/2 | 6      |
|--------------------------------------------------------|-------|-------|-------|---|---------|--------|-------|--------|
| -Reproduire un nombre donné d'objets                   | 1     | -     | 3     | - | -       | 4      | -     | -      |
| -Montrer autant de doigts que d'objets                 | -     | 1-2   | -     | 3 | -       | 4      | -     | -      |
| -Montrer autant d'objets que de doigts                 | -     | 1-2   | -     | - | 3       | 4      | -     | -      |
| -Imiter un nombre de coups frappés                     | -     | -     | 1     | - | 2       | -      | 3     | -      |
| -Dire combien on a entendu de coups                    | -     | -     | -     | - | 1-2     | 3      | -     | 4      |
| -Dire combien d'objets sans compter                    | 1     | 2     | -     | - | 3       | -      | -     | 4      |
| -Donner un certain nombre d'objets à 1, 2, 3 personnes | 1     | 2     | -     | - | 3       | -      | -     | 4 à 10 |
| -Répéter la suite des nombres                          | 1 à 4 | 1 à 5 | 1 à 6 | - | 1 à 7-8 | 1 à 10 | -     | -      |
| -Dénombrer avec les doigts                             | -     | -     | -     | - | 2 à 6   | 7 à 10 | -     | -      |

*Descœudres, 1921*

La réussite à traiter 3 **dépend des tâches** à réaliser et de l'âge. Acquisitions limitées à des **situations** précises. Modularité des savoirs et savoir-faire.

Colmar oct 2016

31

## Bilan

- Pour les jeunes enfants, le « nombre » n'est pas :
  - Indépendant des caractéristiques perceptives ;
  - Indépendant des situations de mise en œuvre ;

Colmar oct 2016

32



# La chaîne verbale

- Les enfants apprennent très tôt et sans grand effort apparent, **la suite des noms de nombres** (= la **chaîne verbale** : un, deux, trois, etc..); la vitesse d'apprentissage dépend de la régularité du code verbal;
- La connaissance de la chaîne **ne garantit pas que les enfants sachent s'en servir** pour, par exemple, déterminer le successeur d'un nombre ou la plus grande de deux quantités ;
- Les enfants **ne généralisent pas** à l'ensemble des nombres les savoirs et savoir-faire qu'ils sont en mesure de mobiliser sur les petites quantités qu'ils maîtrisent: une fois parvenus à 4, ils ne sont pas capables de dire si 14 est plus grand que 13 alors même qu'ils réussissent pour 5 et 4;

Colmar oct 2016

33

## Plusieurs apprentissages

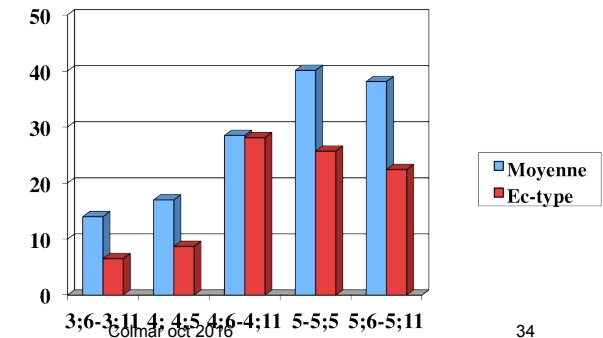
- Les enfants apprennent les noms des nombres un, deux et trois en les associant à des quantités ;
- Cette acquisition, lente, suit un ordre :
  - en premier « un » (vers 21/2 : sachant un) ;
  - puis 2 (vers 3 ou 31/2 : sachant deux) ;
  - puis 3 (vers 31/2 ou 4 : sachant trois) ;
- Cette acquisition est mise en évidence par, d'une part « Donne N », d'autre part « Combien y a-t-il sur une carte ? » ;
- Peu de temps après être devenus « sachant trois ou quatre », ils découvrent le principe cardinal et la fonction de successeur (N, N+1, (N+1)+1...) ; rôle des interventions?

Colmar oct 2016

35

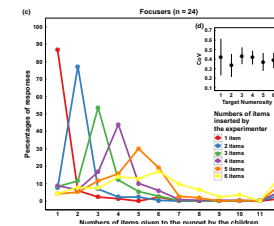
## Évolution de la partie conventionnelle

- Dernier item atteint au comptage sans dénombrement



Colmar oct 2016

34



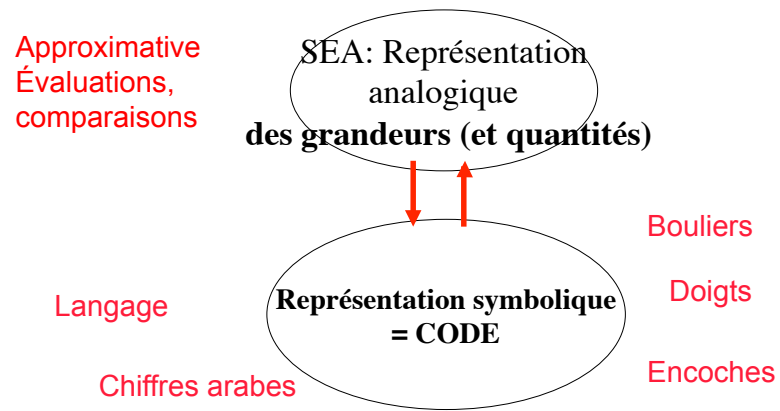
## Que faire?

- Le problème est triple:
  - Raffiner les **capacités de comparaisons** des grandeurs et quantités ; établir **l'équivalence** des quantités ; **correspondances terme à terme** ;
  - Acquérir **un (ou des) système(s) symbolique(s)** (noms de nombres, chiffres arabes, ou autre) ;
  - **Associer les symboles aux quantités** dans les deux sens : cardinal (notion très abstraite) ; évocation et production automatiques ;

Colmar oct 2016

36

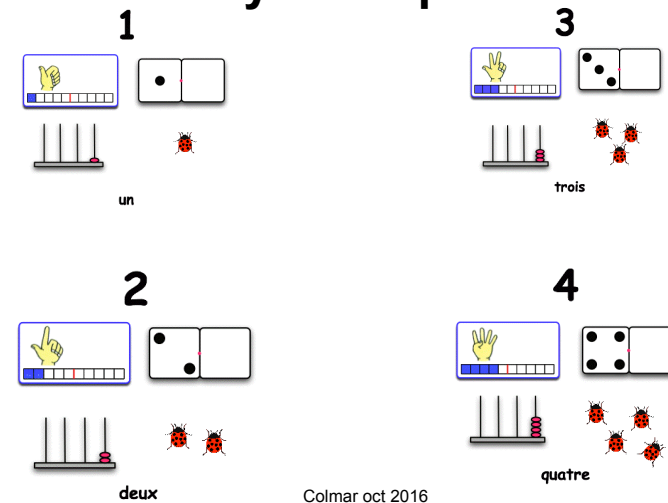
## Associer les symboles aux quantités et utiliser les deux



Colmar oct 2016

37

## Différents codes analogiques et symboliques

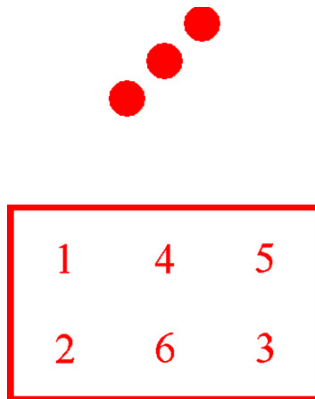


Colmar oct 2016

38

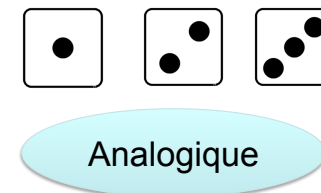
## Appariement Mots-Chiffres-Quantités

Benoît, 2013



Colmar oct 2016

39



Noms de  
Nombres

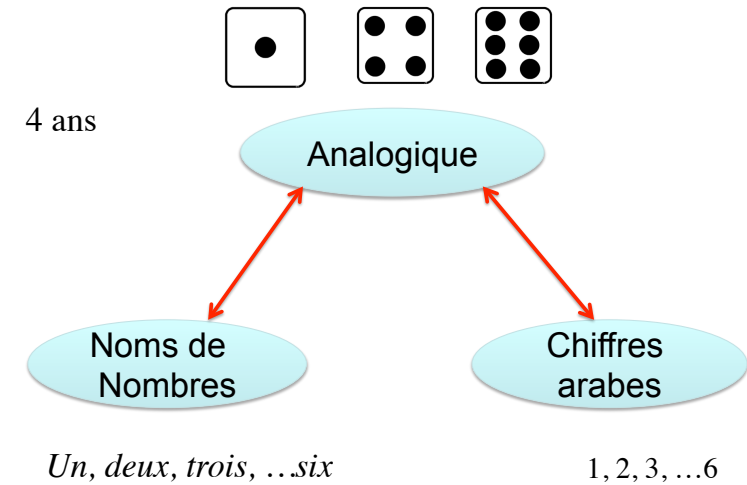
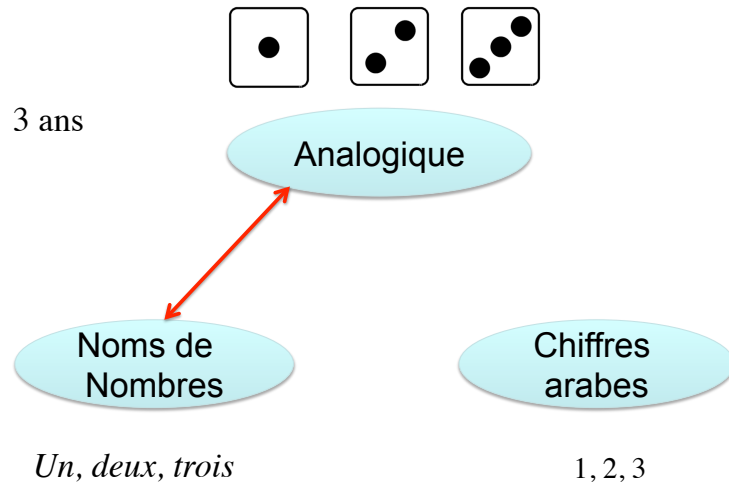
*Un, deux, trois*

Chiffres  
arabes

1, 2, 3

Colmar oct 2016

40



**Transcodage en passant par la quantité**

## Plusieurs activités

- Reconnaître et dénommer les quantités ;
- Passer de  $n$  à  $n + 1$  (et à  $n - 1$ ) ;
- Comparer et ordonner les quantités ;
- Associer des collections-témoins (dominos, doigts) aux quantités et aux symboles ;
- Dénombrer: dire combien il y a ; donner  $x$  ;
- Distinguer le comptage du dénombrement ;
- Composer et décomposer ;
- Résoudre des problèmes ;

## Exploiter les petites quantités

De 1 à 3 ou 4 puis à 5 et 6 jusqu'à 10

## Plusieurs activités

- Chercher des entités dissimulées dans des boîtes opaques (non verbal) ; comparer des ensembles hétérogènes (non verbal) ;
- Trouver le résultat d'ajouts ou de retraits (non verbal) ; puis verbal ;
- Déterminer si la CTàT permet de savoir combien sans compter (il y a autant de n que de m et il y a n, combien de m?), verbal ;
- Passage du non verbal au verbal: grand problème ;

Colmar oct 2016

45

## Mémoire et transformations (non verbales)

On place 1 jeton (ou plus) dans une boîte opaque. On ajoute (ou on retire) 2, 3, 4 jetons **sans que l'enfant puisse voir le résultat**. On demande à l'enfant de produire lui-même le résultat avec ses propres jetons.



Mettre ensuite ou non en relation avec les symboles ( $1 + 4 = 5$ ); étudier les stratégies;

Colmar oct 2016

46

## Les tout-débuts

|                    | Boîte réelle fermée | Boîte évoquée | Présentation formelle |
|--------------------|---------------------|---------------|-----------------------|
| Petits nombres < 3 | 83%                 | 56%           | 15%                   |
| Grands nombres > 3 | 28%                 | 20%           | 6%                    |

Jusque vers 5 ans 1/2, réussite lorsque les quantités sont petites et associables à des représentations spatio-temporelles (évoquant en mémoire). Aller **progressivement de quantités manipulées à des quantités évoquées puis à des symboles** ; des petites aux plus grandes quantités ;

Colmar oct 2016

47

## Ajouter ou retirer (max de 2 à 5) Présentation verbale

| Âge | Tâche        | numérosité |     |     |     |
|-----|--------------|------------|-----|-----|-----|
|     |              | 2          | 3   | 4   | 5   |
| 36  | Addition     | .86        | .54 | .33 | .07 |
|     | Soustraction | 1.00       | .71 | .38 | .07 |
| 42  | Addition     | .88        | .66 | .25 | .19 |
|     | Soustraction | 1.00       | .72 | .40 | .06 |
| 48  | Addition     | .81        | .66 | .19 | .19 |
|     | Soustraction | 1.00       | .78 | .42 | .19 |

Très faibles performances au-delà de trois: résolution par évocation. Peu d'utilisation des doigts ou autres dispositifs.

Colmar oct 2016

48

## Difficultés

- Percevoir les actions est plus facile que les évoquer à partir du langage ;
- Les noms de nombres sont des abstractions: beaucoup de temps avant de conduire à l'évocation des quantités précises ;
- Passer du comptage au cardinal ; et réciproquement (jeux de plateau) ; comptage et correspondance terme à terme ;

Colmar oct 2016

49

## Mises en correspondance progressives

- Configurations aléatoires ou conventionnelles (collections témoins ; doigts) ;
- Mots de nombres; chiffres arabes ; ne pas les confondre (transcodage) ;
- Quantités et symboles (dans les deux sens: précision, rapidité) ;
- Élaboration progressive par  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+1+1$ , etc.

Colmar oct 2016

50

## Le dénombrement

Suite verbale, pointage moteur et coordination

Colmar oct 2016

51

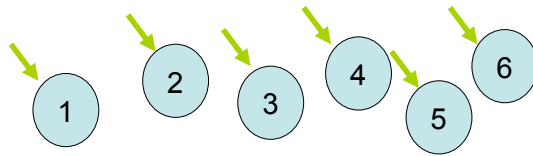
## Le dénombrement

- Coordination de la mise en œuvre de **deux composantes, sources potentielles de difficultés** :
  - Composante **motrice** (pointage, mouvements des yeux, etc) ;
  - Composante **symbolique** (noms de nombres, chiffres arabes, formes signées) ;
  - Possible coût de cette **coordination**, qui s'ajouterait aux coûts de chacune des deux composantes ;
  - Quel impact chez les enfants TSL ou dyspraxiques? Trois sources de difficultés :

Colmar oct 2016

52

## Dénombrer : procédure canonique



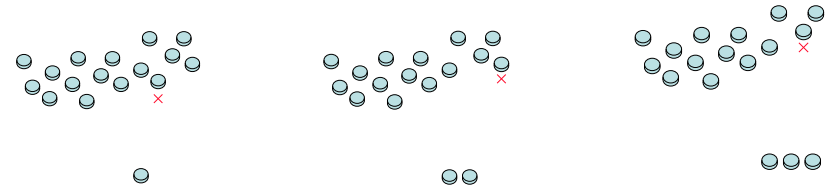
- Stricte **correspondance terme à terme** entre désignation des éléments et items servant à les désigner ;
- Ordre stable** des éléments servant à désigner ;
- Le **dernier** élément énoncé fournit la cardinalité ;
- Abstraction**: aucun impact de l'homogénéité ou de l'hétérogénéité ;
- Non pertinence de l'ordre** du traitement ;

Landerl et al., 2004

Colmar oct 2016

53

## Dénombrer: cardinal



## Éviter le comptage numérotage

Colmar oct 2016

54

## Performances en fin de GSM (70 mois) vers le CP

| Principes                  | Pourcentages |
|----------------------------|--------------|
| Ordre stable (OS)          | 62.4         |
| Correspondance T à T (CTT) | 95.3         |
| <b>Cardinalité C</b>       | <b>65.7</b>  |
| OS+CTT                     | 59.1         |
| OS+C                       | 43.3         |
| CTT+C                      | 65.7         |
| Les trois                  | 44.2         |

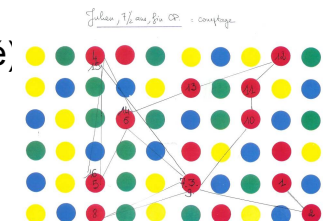
Colmar oct 2016

55

## Le dénombrement : diagnostic

- Différencier les erreurs de performances des troubles de la compétence (*Gallistel & Gelman 1983*) ;
- **Comparaison de performances dans trois conditions** : pointage de jetons sans dénombrement ; énonciation des noms de nombres; jugement du dénombrement (exact ou erroné) effectué par une marionnette ;
- Enfants TSL, dyspraxiques et contrôles appariés sur l'âge ;
- Camos, Fayol, Lacert, Bardi & Laquière, 1998

Difficultés d'attention:  
Julien, 7 ans : 16 au lieu de 15;



Colmar oct 2016

## Activités avec nombres de plus en plus grands

- Reconnaître, dénommer, comparer et ordonner des collections; puis les symboles correspondants;
- Associer différentes représentations (livres à compter) ; utiliser des collections-témoins (doigts) ; **puis** des symboles ;
- Dénombrer (dire combien il y a) et donner x ; collections -> symboles ET symboles -> collections ;
- Composer et décomposer (un et encore un et encore un et encore un c'est quatre; deux et encore deux c'est quatre) ;
- Résoudre des problèmes : en actions; à partir de petites histoires; à partir de situations ; sous format abstrait; passage progressif au verbal ;

Colmar oct 2016

57

## Cycle 2

Des actions aux représentations d'actions  
puis aux traitements symboliques

Colmar oct 2016

58

## Les relations code quantités R11

- Questions relatives **aux codes de la numération orale puis écrite**, à leurs propriétés et aux apprentissages correspondants ;
- L'apprentissage du code indo-arabe au-delà de la dizaine : **la notation dite de position** et ses difficultés ; notation qui correspond à des concepts nouveaux que les élèves doivent acquérir et qui pourraient contribuer à favoriser cette acquisition ;

Colmar oct 2016

59

## Les opérations

- **Utiliser et combiner des symboles suivant des règles** (addition, soustraction, multiplication, etc.) plutôt que de réaliser des transformations (ajouter, enlever, partager) portant sur les quantités concrètes correspondant à ces symboles ; R15 R16
- **Apprendre que la manipulation réglée des symboles aboutit au même résultat que l'application des transformations ;**
- Découvrir la « liberté » relative de manipulation des symboles: **propriétés des opérations** (inversion, commutativité, etc.)

Colmar oct 2016

60

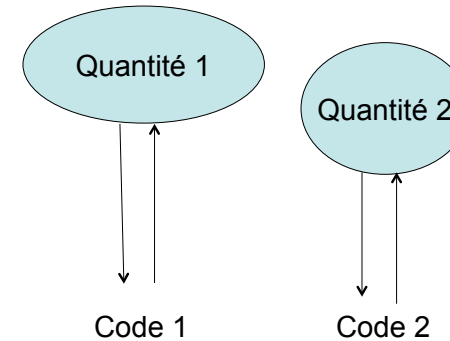
## Les traitements symboliques

- Le traitement symbolique des opérations nécessite :
- La compréhension et l'automatisation des relations entre symbole et cardinal (dans les deux sens) ;
- La compréhension du fonctionnement des représentations symboliques : verbales et indo-arabes (succession, itération de l'unité) ; relations ordinales (ligne numérique) ;

Colmar oct 2016

61

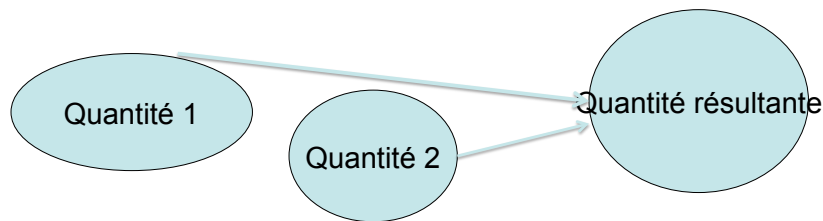
## Les quantités et leur codage symbolique



Colmar oct 2016

62

## Les transformations

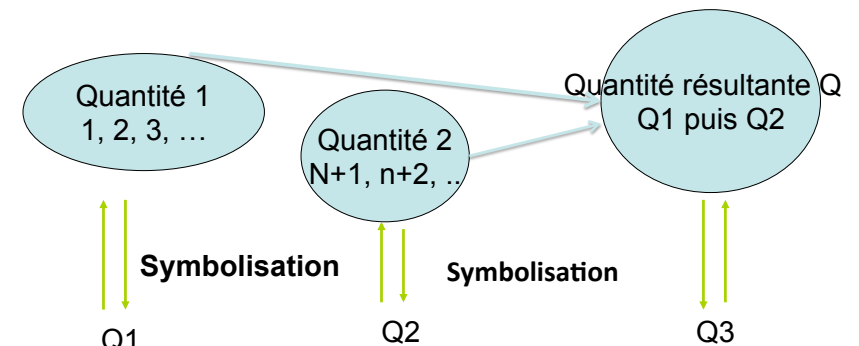


La réunion (ou l'extraction) physique portant sur deux quantités (ou plus) aboutit à une nouvelle quantité, résultante. **Intuition primitive très précoce.**

Colmar oct 2016

63

## Des transformations vers les opérations



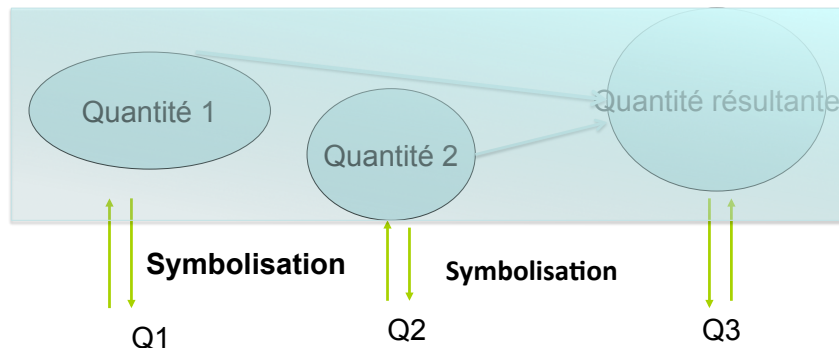
L'appariement de chaque ensemble avec un symbole permet d'aboutir à **un nombre pour chaque quantité** (Q1, Q2 et Q3). L'aboutissement est équivalent au parcours de Q1 puis de Q2 en un même dénombrement.

Colmar oct 2016

64



## Des transformations vers les opérations

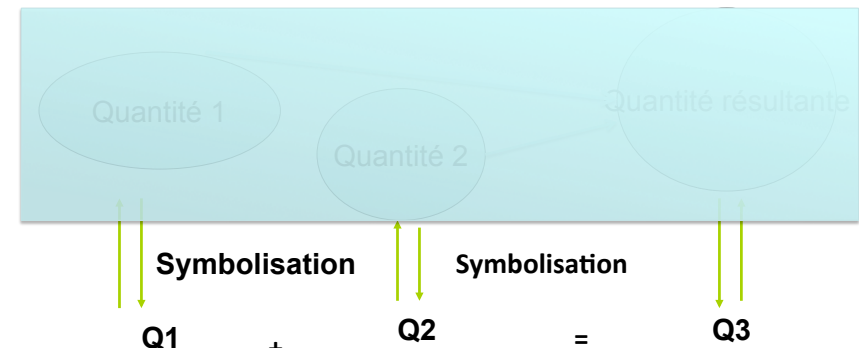


Passage de Q1 puis Q2 à  $Q1 + 1, +2, +3, \dots$  Jusqu'à Q3.  
Puis commencer par le plus grand des deux (Min m, n)

Colmar oct 2016

65

## Les opérations



Puis commencer par le plus grand des deux (Min m, n)  $Q1 + Q2 = Q2 + Q1 = Q3$

**Compositions et décompositions ; faits ;**

**Commutativité** de l'addition, non de la soustraction

Colmar oct 2016

66

## Entraînement informatisé

- 147 enfants de CP répartis aléatoirement en groupes entraînés (analogique ou symbolique) ou non;
- 10 sessions de 30 mn pendant 4 semaines; le programme adapte automatiquement la difficulté à la performance de l'élève;
- Les groupes entraînés font mieux que le groupe contrôle ; c'est l'entraînement « approximatif » qui améliore le plus les performances ;

Colmar oct 2016

67

## L'apprentissage du code indo-arabe et le transcodage

Une difficulté particulièrement importante en francophonie

Colmar oct 2016

68

## Propriétés du code indo-arabe

- Lexique restreint (10 éléments dont zéro);
- **Notation positionnelle** (la valeur dépend de la position: 1; 10; 100; 1000);
- Erreurs de position : 201 vs 210; importantes **difficultés en 2ème et 3ème primaires**;
- Problèmes de **transcodage oral -> écrit** : erreurs spécifiques en Français (6012 pour soixante douze; 42016 pour quatre vingt seize); non transparence de la base dix;
- Utiliser longtemps du matériel pour manipuler en base 10 ;

Colmar oct 2016

69

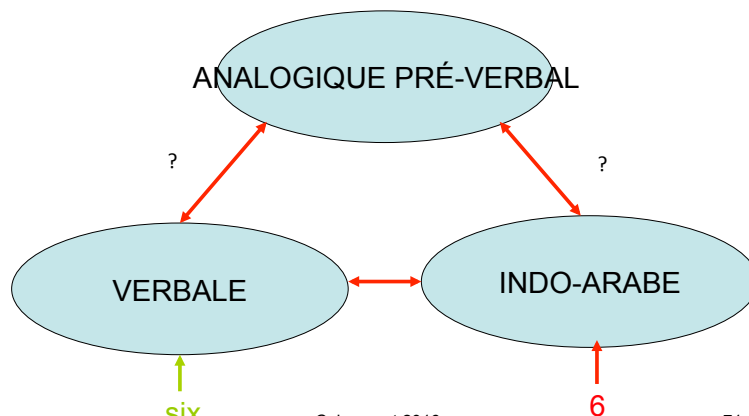
## En français

- Suite verbale des noms de nombres **irrégulière** : base dix transparente seulement à partir de *dix-sept* ; pas ou peu transparente avec *vingt*, *trente*, *quarante* ; puis irrégularités avec *soixante-dix*, *quatre-vingt* et *quatre-vingt-dix* ;
- Complique l'apprentissage de la numération indo-arabe car base 10 systématique ;

Colmar oct 2016

70

## Traitements des chiffres et mots de nombres Transcodage



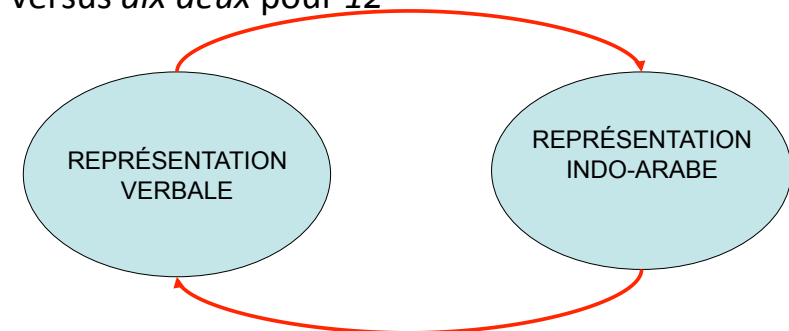
Transiter par la signification?

Colmar oct 2016

71

## Représentations verbale et indo-arabe

Difficulté dépend de la **facilité d'appariement** entre code verbal et code indo-arabe: *douze* versus *dix deux* pour 12



Colmar oct 2016

72

# La représentation indo-arabe

(Seron & Fayol, 1994 ; Fayol & Seron, 2005, 2015)

- Erreurs initiales de transcodage;
- Comparaison Wallon/Français :  
Ecriture sous dictée en Deuxième primaire (CE1)
- Quatre vingt deux -> 4202 ou 802  
Soixante douze -> 6012  
Quatre vingt dix sept -> 42017
- Erreurs de même type chez des adolescents en grande difficulté d'apprentissage ;

Colmar oct 2016

73

# Transcodage en fin de CE1

Jarlegan et al., 1996

- **Structure**: D (30, 60) DC (70, 90), DU (41, 57), DCU (76, 83), CDU (312, 749), CDCU (481, 293) MCDU (1352) ;
- **Épreuves** : RC, LR, CR, LC, RL, CL (R Représentations avec cubes, barres de 10 et plaques de cent ; L : écriture en lettres des noms de nombres ; C : écriture en chiffres ;
- Au total 192 items (48 par condition) ;

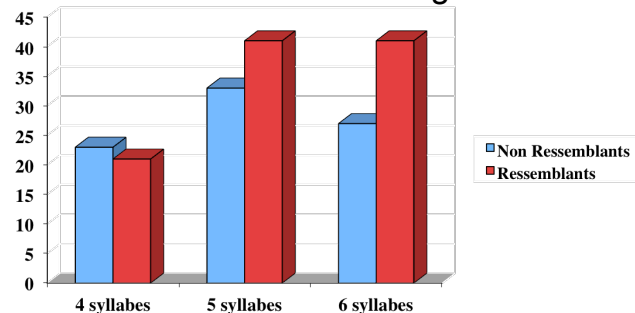
Colmar oct 2016

74

# Résultats du transcodage en CE2

Fayol & Seron, 2015

Mémoire à court terme : longueur et sonorité



Exemples de nombres :

NR 4S : 3029, 1203; R 4S : 1117, 1516;  
NR 5S : 9401, 2045; R 5S : 6057, 7160;  
NR 6S : 1842, 8091; R 6S : 3084, 5617;

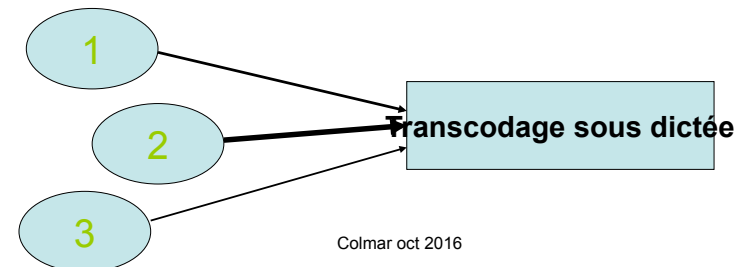
Colmar oct 2016

75

# Réussir le transcodage

Perros et al., 1998

- Maintenir la configuration verbale en mémoire (1) ;
- Déterminer le nombre de chiffres (frame) (2) ;
- Capacité de contrôle ultérieur (3) ;
- Application : en CE1 : passage de 126 à 4 erreurs en quelques jours ;



Colmar oct 2016

76

## Un cumul de difficultés

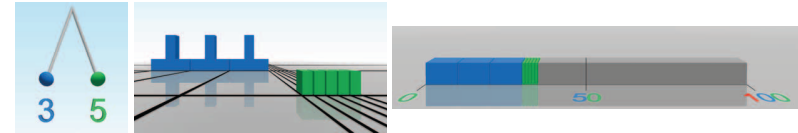
- Les **irrégularités de l'oral** rendent complexe l'apprentissage du code arabe ; erreurs consécutives à la mémoire et aux irrégularités ; rôle de la répétition ;
- Importance des **relations entre base 10 et codage arabe** : numération de position ; risques de traitements sans compréhension ;
- Intérêt d'**associer des manipulations de matériel ad hoc avec le codage arabe** ;

Colmar oct 2016

77

## Trois modalités de représentation

R7



Graphique du nombre (gauche); réglettes de couleur (milieu); ligne numérique (droite)

*Käser Fr in Psy 2013 N26 Programme Calcularis*

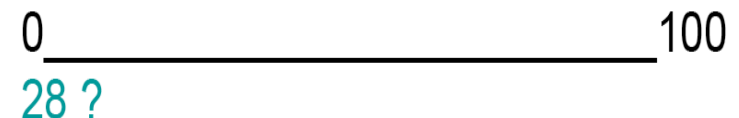
Colmar oct 2016

78

## La ligne numérique comme outil d'évaluation de la représentation

## La ligne numérique

Importance de l'unité



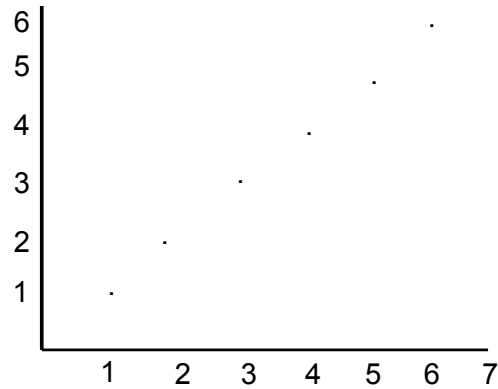
Colmar oct 2016

79

Colmar oct 2016

80

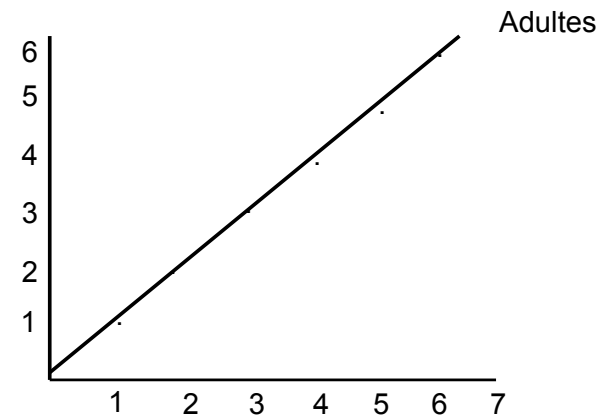
## Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique



Colmar oct 2016

81

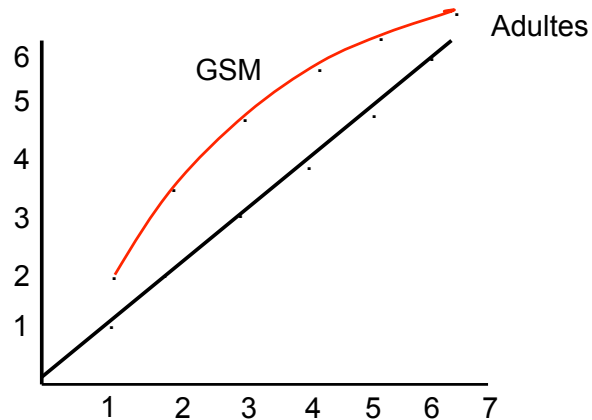
## Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique



Colmar oct 2016

82

## Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique



Colmar oct 2016

83

## Évolution des estimations

Siegler, R.S., & Booth, J. L. (2004); Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006)

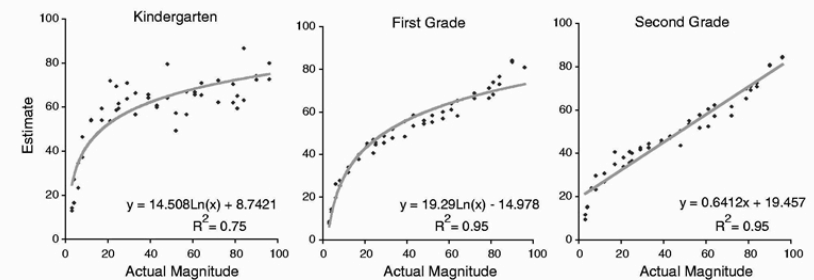


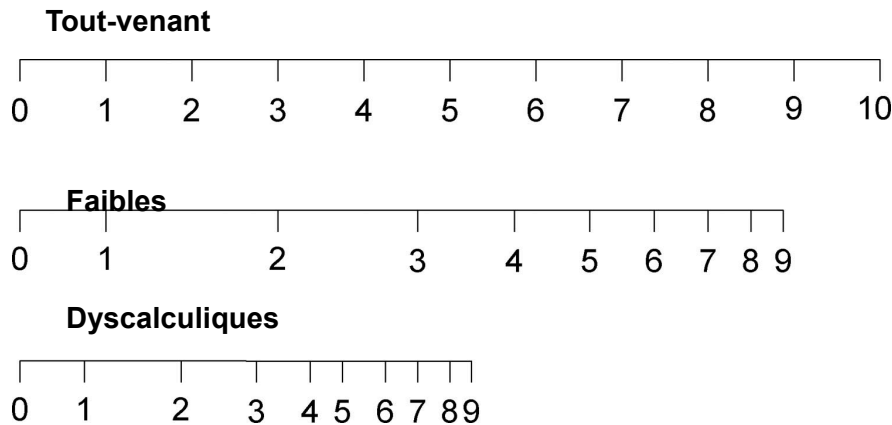
Figure 2. Progression from logarithmic pattern of median estimates among kindergartners (left panel) to linear pattern of estimates among second graders (right panel) in Experiment.

Évolution de la mise en relation entre système symbolique verbal (quinze...) et représentation spatiale: du logarithmique au linéaire.

Colmar oct 2016

84

## Patrons de performance



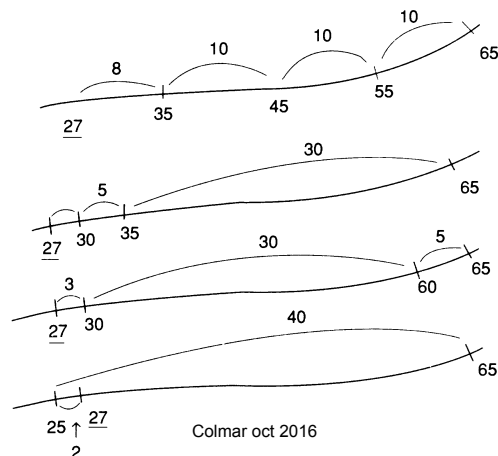
Colmar oct 2016

Geary, 2011

85

## Utilisations de la ligne numérique

Soustraction 65 - 38



Colmar oct 2016

Beishuizer, 2004

## Évolution

- Sur une ligne allant de 0 à 10, le pourcentage d'erreur (PAE) de 14% en fin de CP à 4% en CE2 ;
- De 0 à 100, le PAE passe de 19% en fin de CP à 8% en fin de CE2 ;
- Sur une ligne allant de 0 à 1000, le PAE passe de 21% en CE1 à 14% en CM1 puis à 7% en Sixième et 1% chez l'adulte ;
- Les erreurs sont beaucoup plus importantes avec les fractions (ligne de 0 à 1 ou 0 à 2) et les décimaux ;
- **Relations avec la performance en mathématiques** ; meilleur prédicteur des performances arithmétiques en CP et CE1 ; au delà de l'évaluation de l'ordre ;

Colmar oct 2016

86

## Unifier conceptuellement la notion de nombre

- La ligne numérique : pour les **entiers naturels** ;
- Pour les **fractions** : bornes (0 – 1 à 0 – 2 par exemple) ;
- Fortement liée aux performances arithmétiques (opérations, problèmes) ;
- Prédit les réussites ultérieures (au-delà du CM1) ;
- **Entraînable** avec effets sur les performances arithmétiques ;

Colmar oct 2016

88

## Les opérations

Calcul mental versus opérations posées

Colmar oct 2016

89

## Les opérations : 4 dimensions

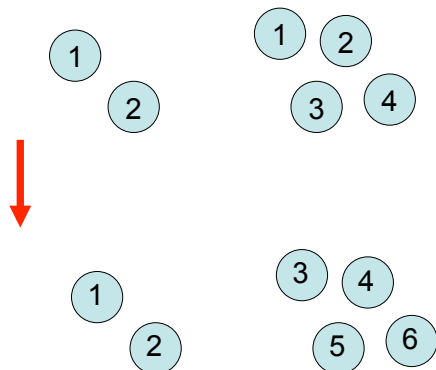
- Des **situations** : les premières « opérations » sont très dépendantes des situations présentées ; indépendance croissante ;
- Des **procédures** : découvertes par les enfants puis enseignées ; algorithmes ;
- Des **faits** (dit arithmétiques:  $3 + 4 \rightarrow 7$ ) ;
- Des **propriétés** (commutativité, inversion, etc.) ; R16

Colmar oct 2016

90

## Le tout-début : compter tout

Compter tout (2 puis 4) : agir (réunir) puis dénombrer le total (6).

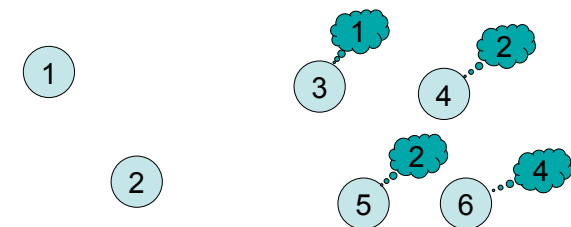


Colmar oct 2016

91

## Puis : compter à partir du premier fourni

Avec objets présents: action dépendante de la présentation

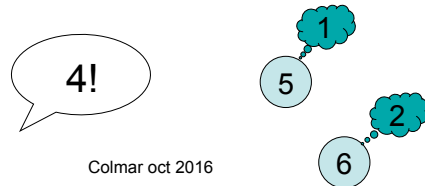
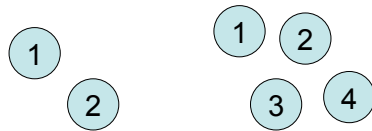


Colmar oct 2016

92

## Puis : compter à partir du plus grand

Début des opérations : l'ordre de traitement s'autonomise par rapport à l'ordre de présentation :  $a + b = b + a$



Colmar oct 2016

93

## Stratégies 1010 ou N10: additions et soustractions R14 – R18

*Mental Strategies 1010 and N10 for Addition Up to 100: No-Carry and Carry Problems*

No-carry problem:  $46 + 23$

Carry problem:  $38 + 16$

$$1010: \begin{array}{l} 46 \leftarrow 40 + 20 = 60 \\ \quad \quad 6 + 3 = 9 \end{array} \} 60 + 9 = 69$$

$$1010: \begin{array}{l} 38 \leftarrow 30 + 10 = 40 \\ \quad \quad 8 + 6 = 14 \end{array} \} 40 + 10 = 50, 50 + 4 = 54$$

$$N10: 46 + 20 = 66, 66 + 3 = 69$$

$$N10: 38 + 10 = 48, 48 + 2 + 4 = 54$$

*Mental Strategies 1010 and N10 for Subtraction up to 100: No-Carry and Carry Problems*

No-carry problem:  $58 - 26$

Carry problem:  $42 - 15$

$$1010: \begin{array}{l} 58 \leftarrow 50 - 20 = 30 \\ \quad \quad 8 - 6 = 2 \end{array} \} 30 + 2 = 32$$

$$1010: (\text{carrying afterward}) \begin{array}{l} 42 \leftarrow 40 - 10 = 30 \rightarrow 20 \\ \quad \quad 2 - 5 = ? \rightarrow 12 - 5 = 7 \end{array} \} 20 + 7 = 27$$

$$1010: (\text{carrying before}) \begin{array}{l} 42 \leftarrow 30 - 10 = 20 \\ \quad \quad 12 - 5 = 7 \end{array} \} 20 + 7 = 27$$

$$10 - s: (\text{units stepwise}) \begin{array}{l} 42 \leftarrow 40 - 10 = 30 \\ \quad \quad 2 - 5 = ? \end{array} \} 30 + 2 = 32, 32 - 2 - 3 = 27$$

$$N10: 58 - 20 = 38, 38 - 6 = 32$$

Colmar oct 2016

$$N10: 42 - 10 = 32, 32 - 2 - 3 = 27$$

95

## Evolution des procédures de calcul

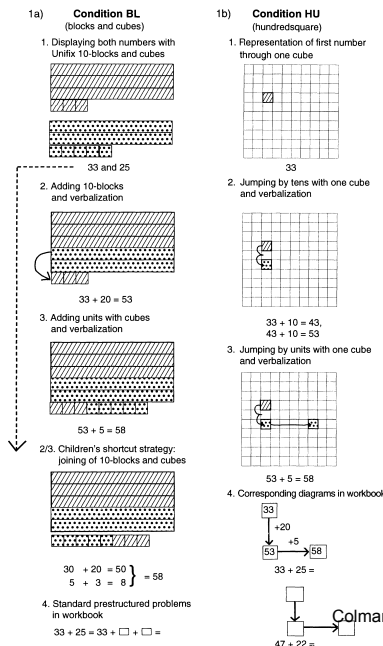
Diversité des procédures de résolution d'opérations simples

- **Objets** eux-mêmes; tout compter ;
- **Substituts analogiques** des objets (doigts) ;
- **Compter mentalement**, en commençant par le premier fourni (3) puis par le plus grand (4) (min m,n) découverte de la **commutativité** ;
- **Retrouver directement** en mémoire verbale le résultat d'une association (3 et 4 -> 7) ;
- **Décomposer** le problème à résoudre ;  $7 + 5 \rightarrow 7 + 3 + 2$

Les performances varient en fonction : de la taille des nombres ; de la modalité de présentation ; de la situation décrite ;

Colmar oct 2016

94



Comparaison de la technique des **blocs** et de celle du déplacement sur le carré de cent

Colmar oct 2016

96



## Types d'erreurs commises

| Error types                  | 1010 strategy                                                        | f           | N10 strategy                                                         | f |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------|-------------|----------------------------------------------------------------------|---|
| Wrong number facts (units)   | $38 + 16 = 40 + \underline{13} (8 + 6) = \underline{53}$             | 5           | $42 - 15 = 32 - 5 = \underline{28}$                                  | 8 |
| Wrong number sequence (tens) | $58 - 34 = 50 - 30 = \underline{10} + 4 = \underline{14}$            | 4           | $46 + 23 = \underline{76} (46 + 20) + 3 = \underline{79}$            | 7 |
| Forgetting number parts      | $46 + 23 = 60 + \underline{3} = \underline{63}$                      | 6           | $26 - 12 = 26 - 10 = \underline{16}$                                 | 2 |
| Not carrying tens            | $42 - 15 = \underline{30} + 7 (\underline{12} - 5) = \underline{37}$ | 10          | —                                                                    | — |
| Wrongly combining steps      | $58 - 34 = 20 - \underline{12} (8 + 4) = \underline{8}$              | 12          | —                                                                    | — |
| Wrongly subtracting-all      | $26 - 12 = 10 - \underline{6} - \underline{2} = \underline{2}$       | 15          | $58 - 34 = 28 - \underline{8} = \underline{20} - 4 = \underline{16}$ | 3 |
| Smaller-from-larger bug      | $42 - 15 = 30 + \underline{3} (\underline{5} - 2) = \underline{33}$  | 17          | $42 - 15 = 32 - 5 (\underline{5} - 2) = \underline{33}$              | — |
| Wrong 10s-adaptation         | $42 - 15 = 30 + \underline{5} = \underline{35} - 2 = \underline{33}$ | 6           | —                                                                    | — |
| Other                        | —                                                                    | 3           | —                                                                    | 2 |
| Colmar oct 2016              |                                                                      | Total = 78  | Colmar oct 2016                                                      |   |
|                              |                                                                      | Mean = 1.95 |                                                                      |   |
|                              |                                                                      |             | Total = 94                                                           |   |
|                              |                                                                      |             | Mean = 0.71                                                          |   |

## Importance des connaissances

- Les **faits** ( $4 + 5 \rightarrow 9$ ) et les savoir-faire (**procédures**) sont indispensables pour réussir les opérations complexes, mentales ou posées ; ces dernières **à la fois les mobilisent et les consolident** ;
- Importance des exercices : **systématiques, brefs, quotidiens** ;
- Toute la scolarité ; jeux ou opérations de plus en plus complexes et rapides?

Colmar oct 2016

98

## Les opérations Connaissances conceptuelles

Une question peu abordée

## Comment résolvez-vous?

- $147 \times 236 / 236$ ? Inversion x et /
- $274 \times 418 / 312$ ? Contrôle ou Standard
- $523 \times 480 / 240$ ? Associativité  $(axb)/c = ax(b/c)$

## Quelques propriétés

- La **commutativité** de l'addition et de la multiplication :  $3+4 = 4+3$ ;  $4 \times 5 = 5 \times 4$  mais pas de la soustraction ou de la division ;
- La **relation inverse** entre addition et soustraction :  $a+b=c \rightarrow c-a=?$ ; idem entre multiplication et division ;
- L'**associativité**: entre addition et soustraction  $(a+b)-c = a+(b-c)$  mais pas entre soustraction et multiplication  $(a-b) \times c$  diffère de  $a-(b \times c)$ , etc.
- Peu de tests, peu d'activités...

Colmar oct 2016

101

## Des questions

- La possibilité d'utiliser l'inversion ( $a+b-b$ ) pour résoudre une opération complexe, par comparaison avec une opération standard ( $a+b-c$ ) se traduit-elle par une meilleure réussite, plus rapide et par l'explication de cette utilisation?
- Même question pour l'associativité: calculer  $a+b-c$  en effectuant parfois  $b-c$  puis  $a+(b-c)$  plutôt que  $a=b$  suivi de  $(a+b)-c$  ;

Colmar oct 2016

102

## Connaissances conceptuelles

### *L'inversion*

- La possibilité d'utiliser l'inversion ( **$a+b-b$** ) pour résoudre une opération complexe ( $a + 1 - 1$ ; puis  $a + 2 - 2$ ), par **comparaison** avec une opération standard ( **$a+a-c$** ) ( $a + a - 1$ ;  $a + a - 2$ ) se traduit-elle par une meilleure réussite, plus rapide et par l'explication verbale de cette utilisation?
- Avec des briques en plastique combinables ; enfants de 5 ans et demi ; pas de généralisation ;

Colmar oct 2016

103

## L'inversion potentielle est-elle utilisée?

|             | Concrète identique | Concrète Différente | Invisible identique | Invisible Différente | Verbaux | Abstrait |
|-------------|--------------------|---------------------|---------------------|----------------------|---------|----------|
| $a + b - b$ | 2,4                | 1,55                | 1,65                | 1,2                  | 1,55    | 1,4      |
| Contrôle    | 0,3                | 0,4                 | 0,5                 | 0,2                  | 0,4     | 0,9      |

**Concrète identique**: briques ajoutées puis retirées au même endroit d'une réglette ;

**Concrète différente**: briques ajoutées et retirées à des endroits différents de la réglette ;

**Invisible** : l'enfant doit imaginer, pas de matériel utilisé ;

**Verbaux**: Il y a 11 cadeaux sous l'arbre de Noël, on en apporte 5 nouveaux, puis Paul en enlève 5. Combien...

Colmar oct 2016

104

## Bilan en CE1 et CM1

- **Inversion utilisée** par environ 50% des enfants, sans **aucune évolution entre CE1 et CM1** ;
- Pourtant, **tous les enfants la jugent pertinente et efficace**: passer d'une connaissance à un savoir faire ; entraîner?
- **Associativité** moins connue, jugée moins souvent pertinente et peu utilisée: scolariser?

Colmar oct 2016

105

## POUR CONCLURE

Deux dimensions

Colmar oct 2016

107

## Conclusion

- Une question **mal connue et peu explorée** ;
- Des performances assez précoces pour certaines propriétés : commutativité et inversion (addition/soustraction) ; des différences interindividuelles qui perdurent ;
- Des performances tardives pour d'autres (associativité) : que donnerait un enseignement?
- **Quelles incidences sur les apprentissages mathématiques ultérieurs?** Pas de données ;

Colmar oct 2016

106

## Deux dimensions

- Une **dimension spécifiquement mathématique** ; poids le plus important dans le devenir des performances mathématiques ; très précocement impliquée ; améliorable précocement ; importance des progressions et des consolidations ;
- Des **dimensions cognitives générales** : le langage et les systèmes symboliques (leurs propriétés) ; la MT, presque toujours impliquée (différentes sous-dimensions) ; la vitesse ; l'attention ;

Colmar oct 2016

108

## Dimension mathématique

- Intervenir **sur le sens du nombre, le dénombrement, la résolution des opérations** ; impact à court terme ; à long terme? Jusqu'où?
- Efficacité d'interventions en maternelle avec enfants défavorisés ; stabilité des résultats 8 semaines plus tard ;
- Efficacité d'interventions combinant opérations et stratégies ;
- Importance de **progressions** permettant de situer les niveaux de performances ;

Colmar oct 2016

109

## Des questions

- Rôle de l'environnement socio-culturel; mal connu, peu évalué ; interventions?
- Rôle de l'enseignement dispensé ; peu étudié ;
- Rôle de l'anxiété, y compris chez les enseignants ; que faire?
- Et sans doute bien d'autres....

Colmar oct 2016

111

## Dimensions générales

- **Intervenir sur les capacités générales:** systèmes symboliques; MT; vitesse?; attention? Des effets?
- **Tenir compte des capacités générales** et de leurs faiblesses ; difficultés de langage (impact sur le transcodage et les opérations mentales ; les faits) ; difficultés spatiales ou praxiques (impact sur la ligne numérique, les calculs et l'aperception des quantités) ; la mémoire à court terme (calcul, faits) ;

Colmar oct 2016

110



## Merci pour votre attention

Pour en savoir plus

Michel Fayol (2015 rééd). *L'acquisition du nombre*.  
Paris: Presses Universitaires de France, QSJ

[Michel.fayol@univ-bpclermont.fr](mailto:Michel.fayol@univ-bpclermont.fr)

Colmar oct 2016

112